IREM de Grenoble
Rapport d'activité 2010-2011 du groupe « Raisonnement, Logique et Preuve » rédigé par Martin Deraux, Denise Grenier et Jean-Baptiste Meilhan

Membres permanents du groupe
Responsable : Denise Grenier, enseignante-chercheuse, Institut Fourier, UFR IMAG, UJF
Yvan Bicaïs, enseignant, collège Le Massegu, Vif
Martin Deraux, enseignant-chercheur, Institut Fourier, UFR maths, UJF
Jean-Baptiste Meilhan, enseignant-chercheur, Institut Fourier, UFR maths, UJF

Autres personnes ayant participé
Martine Brilleaud, enseignante lycée Stendhal Grenoble
Evelyne Gerbert-Gaillard, enseignante, lycée Mounier Grenoble
Ximena Colipan, doctorante, Institut Fourier, UJF
Simon Modeste, doctorant, Institut Fourier, UJF

Notre travail cette année s'est centré sur trois points :

1. Analyse du thème « notations, raisonnement et logique » dans les nouveaux programmes de seconde

2. Étude de deux situations de recherche pour la classe

3. La préparation et la réalisation d'un stage de formation du PAF

1. Étude du nouveau programme, du document ressource et de quelques manuels scolaires sur la logique et le raisonnement mathématique en classe de seconde

1.1. Introduction

Nous nous sommes intéressés à la rubrique « notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée) » du programme 2009 pour la classe de seconde. Cette rubrique méritait d'être étudiée pour plusieurs raisons :

– elle est apparue comme « nouvelle » pour les enseignants et certains d'entre eux ne se sentaient pas prêts pour la mener à bien dans leurs classes ;

– elle a une vraie place dans les mathématiques au lycée, puisqu'elle est reprise telle quelle dans les programmes de 1ère S et ES (et récemment aussi dans les programmes de Terminale S en consultation) ;

– enfin, et ce n'est pas la moindre des raisons, elle contient des objectifs indispensables pour faire des mathématiques, tels que « savoir utiliser différents types de raisonnements ».

Certains des savoir-faire cités ne sont d'ailleurs pas vraiment « nouveaux ». Ainsi, au collège, on enseigne déjà différents types de raisonnements (programmes 2008), tels la disjonction des cas, le raisonnement par l'absurde, et de plus, il y a longtemps qu'on fait faire de courtes démonstrations aux élèves de 4ème et 3ème. Ce qui est réellement nouveau, ce sont les éléments et notations de base de la théorie des ensembles, certains éléments de logique (connecteurs), les quantificateurs, la négation d'une proposition, la distinction proposition directe/réciproque/contraposée. Sur ces derniers points, ce que proposent le document ressources sur ce thème et les quelques manuels édités, va donc jouer pour les enseignants un double rôle de formation et d'appui pour la classe.

Ces objectifs sont très ambitieux. Ils le sont d'autant plus que le programme dit très clairement que cette rubrique « ne doit pas faire l'objet de cours spécifiques, mais doit être répartie sur toute l'année scolaire ». Ce programme préconise donc que la logique doit être enseignée en même temps que d'autres notions mathématiques, nouvelles pour les élèves (puisque ce sont des chapitres du programme) et donc probablement difficiles pour eux.

Nous nous sommes donc posé les questions suivantes :

– Que proposent le document ressources et les manuels pour introduire ces notions ? Donnent-ils des définitions ?
– Dans quels chapitres ont-elles été intégrées et ces choix sont-ils pertinents ? Par exemple, dans quels contextes les quantificateurs sont-ils introduits et travaillés ? Quels problèmes ont été choisis pour « formuler la négation d'une proposition », ou « distinguer une proposition directe de sa réciproque »? etc..
– Les solutions proposées sont-elles adaptées aux objectifs du programme ?
– Bref, ce programme est-il réalisable ? De quelle logique s'agit-il ?

1.2. Quelques éléments de réponses ... et beaucoup de questions.

• « Notations » ou notions ?

Beaucoup d'éléments sont introduits au niveau du langage et du symbolisme naturels ou très peu formalisés, sans que soient évoquées les notions et les théories auxquelles ils se rattachent. Or, il y a des notions fondamentales sous-jacentes à ces notations. Peut-on utiliser « à bon escient » des notations si on ne sait rien sur les notions qu'elles expriment ?
Par exemple, A ℘ B se lit « A inclus dans B ». Cela peut être effectivement utile, mais que peut-on en faire réellement si on ne sait pas que l'inclusion est anti-symétrique, transitive, etc., ou si l'on ne sait pas que l'inclusion stricte correspond à l'existence d'une élément qui est dans B et non dans A ?

• Des notions très différentes, en vrac

La rubrique présente, sans les trier, des notions de difficulté et de nature très différentes, et aussi des notions maîtrisées ou au contraire inconnues des enseignants. Donnons des exemples.
« Formuler la négation d'une proposition » est difficile. Cette question relève plus de la logique que du raisonnement déductif (de type si/alors). En effet, la négation de « si A alors B » est « A et non B ». La difficulté ici (que l'on rencontre chez des étudiants de licence scientifique) est que la négation d'une implication n'est pas une implication. Sauf à essayer de convaincre les élèves de lycée par un argument « naturel », il faudra bien passer par des notions relevant de la logique pour justifier cette propriété. On constate d'ailleurs que le document ressources ne propose rien sur ce sujet, qu'il règle en … deux lignes. Quant à la négation d'une phrase non conditionnelle, mais contenant un quantificateur, la même question se pose. Qu'est-ce qui justifie, en dehors d'un argument d'autorité, que la négation de « Tous les murs sont blancs » ne puisse pas s'exprimer « Tous les murs ne sont pas blancs », mais « Il existe un mur qui n'est pas blanc ». On risque seulement de conforter l'impression que les mathématiques relèvent d'un esprit tordu ou pinailleur. De plus, la consigne « Utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel » paraît très floue sur cet exemple.

On notera que lorsqu'il s'agit d'écrire une proposition conditionnelle directe, la forme « Si A alors B » est très connue, alors que les expressions correspondantes en termes de condition nécessaire/ condition suffisante constituent un obstacle assez largement répandu au delà du lycée.

L'expression « Sans formalisme excessif » laisse entendre que tout formalisme est excessif, or il est nécessaire pour faire des mathématiques. Nous ne croyons pas que le symbole du quantificateur « quel que soit » pose plus de difficultés à l'élève que la compréhension de son expression littérale.

1.2 Document « Ressources pour la classe de seconde, juillet 2009, « Notations et raisonnement mathématiques »

Ce document est édité par le ministère de l'éducation nationale. Nous le désignerons dans la suite par « document-ressource ».
Une première remarque est que le terme « logique » n'apparaît pas dans le titre.
Une deuxième remarque est que l'organisation combinée des thèmes et des éléments de la rubrique est conforme au programme officiel. Les choix faits sont les suivants :

dans le cadre des fonctions	Notions d'ensemble, sous-ensemble, appartenance, inclusion
	Explicitation des quantifications
	Implications et équivalences
en géométrie	Condition nécessaire, condition suffisante
	Appartenance d'un point à une droite
en statistiques et probabilité	Réunion et intersection
	Négation
Langage courant et langage mathématique	
	Langage courant explicite et implicite
	Implication mathématique

Ces choix ne sont pas justifiés dans le document et ils posent de nombreuses questions.

Les notations (notions ?) d'ensemble, sous-ensemble, appartenance, inclusion et les quantificateurs sont associés au thème des fonctions. Etudions l'exercice 1.

1.1. Notion d'ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion

Exemple 1

Soit (O, I, J) un repère orthonormal d'unité 1 cm. On considère les points suivants :

A(2 ; 5,5), B(1,1 ; 1,21), C$(\sqrt{3};2\sqrt{3})$, D$(\frac{2}{3};\frac{3}{2})$, E(–1,21 ; –1,1) et F$(-\frac{5}{3};-8)$.

Parmi ces points, quels sont ceux dont les coordonnées vérifient la relation : $x^2 + y^2 = 25$?

Placer dans le repère d'autres points dont les coordonnées vérifient cette relation.

L'objectif annoncé est : « faire comprendre la notion d'ensemble ». On peut se demander de quels ensembles et sous-ensembles il s'agit : ensemble de points du plan, ensemble de couples de nombres réels (le point de vue algébrique peut suffire à tout résoudre) ? En quoi l'explicitation des ensembles, sous-ensembles inclusions, etc... peut-elle aider à résoudre ce problème ? En fait, elle n'est pas nécessaire et semble artificielle. Ce qui est central ici, ce sont les nombreuses notions en jeu dans cet exercice qui ne vont pas de soi pour des élèves de seconde : couples de nombres réels, opérations sur décimaux et irrationnels, valeurs exactes, repérage et coordonnées dans le plan, unités de mesure, fonction implicite du second degré (ou équation algébrique à deux variables) !
Pour une entrée - comme premier exemple – dans le document-ressource, c'est peu convaincant.

En revanche, l'exemple 4, dont l'objectif est de « faire prendre conscience de la nécessité de *préciser le contexte de la proposition conditionnelle* » et donc les quantificateurs, est tout à fait pertinent.

Exemple 4

L'énoncé : « si $x^2 > 1$ alors $x > 1$ » est-il vrai ?

Une autre question se pose. Les notions de « condition nécessaire » et « condition suffisante » (CN/CS) sont citées en géométrie, domaine où justement très souvent les propriétés et théorèmes sont des équivalences. Autrement dit, ce choix n'est pas le plus heureux pour faire distinguer CN de CS … Prenons l'exemple 7.

Exemple 7

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Les milieux des côtés [BC] et [CD] sont notés respectivement I et J.

Que peut-on dire de la position du point d'intersection de la droite (AC) et de la droite (IJ) ?

Il s'agit d'un problème classique de déduction en géométrie, reposant sur des propriétés – supposées connues des élèves – concernant le parallélogramme. Pour répondre à la question posée, on peut écrire une preuve de type déductif, avec des implications directes, et deux ou trois pas de démonstration suffisent pour conclure. Raisonner explicitement en termes de CN/CS est-il nécessaire ici ? Les enjeux sont essentiellement géométriques. Ceci est confirmé par les commentaires du document-ressource, qui est centré sur les notions et propriétés géométriques, bien plus que sur le raisonnement et la logique (extrait ci-dessous).

Ici, il s'agit de montrer qu'un point est le milieu d'un segment donné. Le professeur pourra inciter l'élève à explorer les différentes méthodes qu'il connaît pour prouver qu'un point est le milieu d'un segment. Suivant le contexte, ce dernier peut chercher les coordonnées de ce point et vérifier que ce sont bien celles du milieu du segment ; il peut aussi chercher si c'est effectivement le point d'intersection d'un côté d'un triangle et d'une droite parallèle à un autre côté ou bien encore chercher à démontrer que c'est le point d'intersection de diagonales d'un parallélogramme.

Cet exercice nous semble emblématique du problème auquel doivent faire face les enseignants : effectivement, quand on fait des mathématiques, il y a de la logique partout, mais comment et où peut-on la mettre en évidence ? L'exemple 7 ne répond absolument pas à la question, ne donne pas les outils pertinents (à savoir, comment faire ressortir les éléments logiques). Au contraire, les éléments mis en avant dans le texte du document-ressource risquent d'ajouter à la confusion.

L'exemple 11 (une réunion de cosmonautes) est un classique qui peut être traité de manière assez naturelle dans le cadre des ensembles. Comme il est placé dans la rubrique « implication mathématique », on peut supposer que l'un des objectif est de relier l'inclusion et l'implication. Aucune question ni aucune remarque, dans le document, ne vont cependant dans ce sens.

Dans l'exemple 9, le travail sur les connecteurs « et » et « ou », et sur les ensembles est plus évident et plus naturel, mais on peut se demander où sont ici les probas/stats ! Ceci semble confirmer la difficulté à assurer dans un même problème, un double travail sur des notions de logique et un autre chapitre dédié du programme.

Exemple 9

Un club sportif propose des cours de judo et des cours de karaté. On note :
A le groupe des adhérents inscrits au judo
B le groupe des adhérents inscrits au karaté.
C le groupe des adhérents inscrits au judo et au karaté.
D le groupe des adhérents inscrits au judo ou au karaté.
E le groupe des adhérents inscrits à un seul de ces deux sports.
Farid s'est inscrit uniquement au karaté, Katia uniquement au judo, et Léo s'est inscrit aux deux cours.
De quels groupes A, B, C, D ou E chacun fait-il partie ?
Myriam est dans le groupe D. Fait-elle partie du groupe des adhérents inscrits au judo ?

Finalement, les pexemples les plus convaincants sont ceux qui ne portent pas sur des notions prédéfinies du programme, mais sur des contextes situés en dehors mathématique (cosmonautes, judo/karaté, Ex. 11, 12, 13, 14 de la section « III. Langage courant et maths ») ; autrement dit, ceux qui ne sont pas conformes à l'esprit du programme !
Si le document ressource n'apporte pas les réponses attendues, nous estimons que c'est sans doute

en partie parce que les objectifs du programme sont déraisonnables.

Un cas particulier, la « Négation d'une proposition »

Le paragraphe concernant cette notion (page 10 du document-ressource) fait seulement cinq lignes et affirme que ce type d'exercice est « nouveau et délicat » ! Il propose deux exemples seulement, qui ne sont pas traités – et que tout le monde peut inventer. On ne décèle aucun apport théorique même minime, alors que c'est effectivement une question complexe en mathématique.
Prenons l'un des deux exemples donnés : « le temps est chaud et humide ». La négation conforme à la logique mathématique est « Le temps est froid **ou** sec ». Les négations des adjectifs chaud et humide ne devraient pas soulever de difficultés. Mais, pour les élèves, une formalisation est nécessaire pour justifier cette forme de la négation. Ce qui est en question ici, c'est que non (A et B) <=> non A ou non B. En prenant pour A « le temps est chaud » et pour B « le temps est humide », on voit que cela ne traduit pas exactement la formulation donnée.
La négation d'une proposition ne va pas de soi en mathématiques, d'autant plus qu'elle est souvent associée à des quantificateurs. Il est dommage qu'un document qui se veut « ressource » ne donne aucun accompagnement aux enseignants sur ce sujet.

Plus généralement, sur ces éléments de logique, il paraît difficile de vraiment convaincre les élèves de la pertinence de ces assertions sans faire une présentation de la logique formelle. L'idée même de faire de la logique « au fil de l'eau », sans aucun cours spécifique dédié, nous semble donc utopique ! On peut finalement se demander de quelle logique il s'agit vraiment dans ce programme...

1.3 Petite étude de quelques manuels pour la classe de Seconde

Nous sommes allés voir comment les manuels ont interprété le programme et résolu ces questions. Nos remarques s'appuient sur la lecture de quelques manuels de seconde 2010, afin de poursuivre la discussion sur ce programme. Nous ne donnerons donc ici que certains éléments qui nous ont interpelés.

Dans le programme, tout « cours de logique » est interdit. Nous avons quand même trouvé dans certains manuels des pages dédiées au raisonnement et à la logique, sous forme de « cours » illustrés, raisonnables dans leur contenu. Citons le manuel Repères (spécial enseignant) qui nous semble de ce point de vue assez remarquable : deux pages, dans sept des chapitres du livre, présentant une ou deux notions de ce thème, avec définitions, notations, exemples, exercices (pages 16-17, 58-59, 96-97, 176-177, 220-221, 258-259, 300-301).
Pourquoi ces présentations sont-elles interdites pour les élèves ? Pour exemple, dans le Declic, l'unique synthèse concernant ce thème tient dans un paragraphe d'un tiers de page (p. 329), intitulé « un peu de logique », avec sous-titre « symbole, vocabulaire », qui présente seulement l'équivalence, le « et », et le « ou ». La formulation ne donne pas le sens des notions que ces symboles représentent, et telle quelle paraît inutilisable.

Conformément au programme, dans les manuels que nous avons consultés, la logique a été intégrée au fil des chapitres, dans les pages réservées aux problèmes. Les problèmes choisis sont souvent inspirés du document-ressource. Un étiquetage «logique » (un logo en couleurs, annoncé au début du manuel) permet de repérer ceux qui sont dédiés à ce thème. Cependant, on a l'impression que cet étiquetage a été fait dans l'urgence, de manière souvent arbitraire. Précisons cette observation.

- En général, on trouve très peu de logos « logique », en comparaison des logos « algo » et « tice » qui eux pullulent ...
- Dans une page de problèmes, l'item (bien rare) étiqueté « logique » ne se différencie souvent pas de ceux qui le précèdent ou qui le suivent. Dans ces conditions, cet étiquetage paraît arbitraire.
- Parfois, la notion étudiée dans le problème étiqueté « logique » est oubliée dans la suite de la page. Le cas des « quantificateurs » est étonnant de ce point de vue.

• Dans certains de ces manuels, les exercices étiquetés « logique » sont quasiment tous donnés sous l'unique forme « Vrai ? Faux ? », suivi d'une liste plus ou moins longue d'affirmations à vérifier. Nous avons souvent eu du mal à voir l'intérêt de poser cette question pour ce type de problème. Exemple :

« Vrai au Faux? Il existe un réel x tel que $\sin(x)=45/\sqrt{2010}$? (Declic, p.156).

• Le « ou » logique est parfois présenté de façon ambiguë : par exemple Hyperbole (et d'autres) l'appelle « disjonction », en opposition de la conjonction (« et »). Cette terminologie semble peu pertinente, puisque justement, en mathématique, le « ou » est inclusif, les assertions ne sont pas nécessairement disjointes, alors que le terme de « disjonction » est par ailleurs utilisé dès le collège pour désigner un type de preuve (disjonction des cas), dans lequel il a le sens d'exclusif. Notons que dans le document-ressource « et » et « ou » sont toutes les deux des « conjonctions», ce qui n'est pas plus pertinent.

On trouve même de vraies perles (à notre avis) : Exemple de l'exercice 76 Declic p.90.

76 Logique
La représentation graphique d'une fonction f passe par les points $A(-2\,;0)$, $B(0\,;-1)$ et $C(-6\,;2)$.
Parmi ces affirmations, lesquelles sont vraies ?
Mathilde : « f est une fonction affine. »
Sami : « Il est possible que f ne soit pas affine. »
Manon : « C'est sûr, f n'est pas une fonction affine ! »
Kevin : « Il est possible que f soit une fonction affine. »

On voit bien ici les effets (pervers) de devoir conjuguer l'enseignement d'un concept (ici, la fonction affine) et celui d'éléments de logique.

1.4 Nos hypothèses et propositions

Notre pratique quotidienne en tant qu'enseignants (universitaires ou secondaires) nous montre que l'apprentissage du raisonnement ne va pas de soi, et qu'il n'est pas acquis chez les étudiants en sciences, au début de l'université. C'est encore plus vrai pour la logique, même de base, qui est celle décrite dans les nouveaux programmes de lycée. Pour atteindre ces objectifs, il faut se donner les moyens réels de les réaliser. Or, il nous semble utopique de croire – et malhonnête de laisser croire – qu'on peut enseigner ces éléments au fil de chapitres, en même temps que des notions nouvelles pour lesquelles les élèves rencontrent des difficultés.

Pour cela, nous pensons qu'il est essentiel, à certains moments de l'enseignement, de proposer des problèmes où les seules connaissances en question sont celles liées au raisonnement et à la logique. Ce peut être des problèmes basés sur des connaissances de collège (et c'est alors une occasion de les revoir, ce qui n'est jamais inutile), ou encore des situations hors contexte mathématique. Nous en avons vu quelques exemples dans le document « ressources », tels les exemples 9 et 11 qui concernent des groupes d'élèves pour l'un, une réunion de cosmonautes pour l'autre. Ces contextes permettent de se centrer sur les notions d'ensemble, sous-ensemble, appartenance, inclusion, conjonctions « et » et « ou », et sur leurs ré-écritures en termes d'implication.

Cependant, certains contextes peuvent créer des bruits inutiles, ou ne pas être pertinent. Par exemple, pour certaines notions comme les quantificateurs ou la négation d'une proposition, des contextes de la vie courante ne permettent pas d'aller trop loin, On risque, en « collant » des règles formelles mathématiques sur des contextes qui ne s'y prêtent pas, de donner une image artificielle et fausse de la formalisation en mathématiques.
Prenons un exemple. Soit la phrase : « S'il fait beau, alors je vais me promener ». On sait qu'elle sera interprétée par une grande majorité de personnes comme une équivalence. Quel travail peut-on alors vraiment espérer en tirer ?

Si on veut écrire la réciproque, on obtient : « Si je vais me promener, alors il fait beau. ». Mais le sens de cette phrase dans le langage courant est peu clair : il ne suffit pas que j'aille me promener pour qu'il fasse beau ! On va donc peut-être décider que la réciproque est fausse.
Considérons la contraposée : « Si je ne vais pas me promener, alors il ne fait pas beau. ». Pas plus que pour la réciproque, je ne décide par ma seule action – aller ou non me promener – du temps qu'il fait ! Or, cette phrase est censée être logiquement équivalente à la phrase initiale.
La temporalité et la causalité sont en fait trop prégnantes dans ce type de phrases, pour permettre de les utiliser dans un discours de logique formelle.

Notre groupe IREM, en relation avec l'équipe « maths discrètes et didactique » de l'Institut Fourier et la fédération de recherche « Maths-à-Modeler » étudie précisément des problèmes susceptibles de remplir au mieux toutes ces conditions.

2. Deux Situations de Recherche pour la Classe (SiRC)

Une partie de nos activités se sont articulées autour de l'élaboration de nouvelles **Situations de Recherche pour la Classe**. Rappelons ici la caractérisation des SiRC par Payan, Grenier (2003):

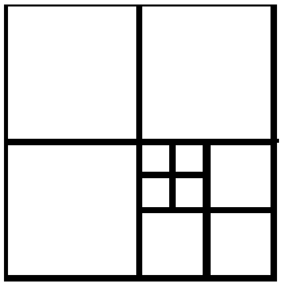
1. *Une SiRC s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle*. Elle doit être proche de questions non résolues. Nous faisons l'hypothèse que cette proximité à des questions non résolues – non seulement pour les élèves, pour l'ensemble de la classe, mais aussi pour l'enseignant, les chercheurs - va être déterminante pour le rapport que vont avoir les élèves avec la situation.
2. *La question initiale est facile d'accès* : la question est « facile » à comprendre. Pour que la question soit facilement identifiable par l'élève, le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées et c'est la situation elle-même qui doit « amener » l'élève à l'intérieur des mathématiques.
3. *Des stratégies initiales* existent, sans que soient indispensables des prérequis spécifiques. De préférence, les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et les plus réduites possibles.
4. *Plusieurs stratégies d'avancée* dans la recherche et plusieurs développements sont possibles, aussi bien du point de vue de l'activité (construction, preuve, calcul) que du point de vue des notions mathématiques.
5. *Une question résolue renvoie très souvent une nouvelle question.* La situation n'a pas de « fin ». Il n'y a que des critères de fin locaux.

L'intérêt de ces SiRC est criant dans le contexte de la valorisation/vulgarisation, dans la mesure où elles donnent une idée beaucoup plus réaliste de l'activité d'un chercheur en mathématique que, par exemple, un exercice issu d'un manuel scolaire. En outre, il semble pertinent d'utiliser ces problèmes posés hors sans prérequis ou présupposition de connaissances, en particulier dans le contexte de la réintroduction et clarification de la logique et du raisonnement dans les nouveaux programmes du collège/lycée.
Il est pour cela nécessaire d'avoir à notre disposition un grande variété de SiRC, de façon à pouvoir satisfaire des publics différents (primaire, collège, lycée, options scientifiques ou non), et à permettre d'aborder différents types de raisonnement, voire d'aborder/illustrer des notions qui apparaissent dans les programmes.
L'importance de l'expérimentation, de la recherche de conjectures est soulignée de façon forte dans les nouveaux programmes (particulièrement pour le collège, mais aussi jusqu'en terminale).

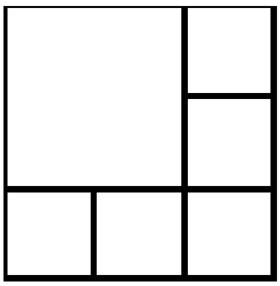
Nous nous sommes concentrés au cours de l'année 2010-2011 sur deux SiRC particulières, présentées dans le cadre d'ateliers de l'APMEP (journée Rhone-Alpes, 16 mars 2011 et journées nationales, octobre 2011). Nous avons également eu l'occasion de les expérimenter lors de la Fête de la Science (12 au 16 octobre 2010), ainsi que dans une classe de 3ème (collège Le Massegu, Vif, classe d'Yvan Bicais).

Pavages de carrés par un carré

On fixe un carré, et l'on veut étudier les découpages de ce carré en un certain nombre de carrés plus petits. La question est alors de savoir pour quels valeurs de n le carré admet un découpage en n carrés. On pourra être amené à préciser ce que signifie « découpage » (les intérieurs des petits carrés doivent être disjoints, et leur réunion doit être le grand carré tout entier).
On voit facilement que n=1, n=4 sont possibles, alors que les autres « petites » valeurs de n semblent difficiles à réaliser (quelles valeurs de n<10 arrivez-vous à réaliser?) On est rapidement amené à conjecturer que n=2, n=3, n=5 sont impossibles, et on produit rapidement une preuve de ce fait (comme souvent, il y a des preuves plus ou moins convaincantes, et même les preuves convaincantes peuvent être plus ou moins efficaces). Un façon efficace pour n=2 et 3 est de raisonner sur les coins du carré (si n>1, il doit y avoir un petit carré dans chaque coin du grand carré).
On essaye alors de deviner quelles valeurs sont possibles, ce qui peut être l'occasion de réfléchir à la notion de preuve (un dessin suffit-il?) En utilisant le découpage de base du carré en 4 morceaux (découpés par les deux médianes), et en l'itérant sur les petits carrés d'un découpage donné, on voit que s'il existe un découpage avec n carrés, alors il en existe aussi un avec n+3 carrés:



En particulier, il existe un découpage pour n=1+3k, k un naturel quelconque. Il peut être tentant de penser que comme n=2 et 3 sont impossibles, les nombres de la forme 3k ou 2+3k ne devraient pas apparaître comme nombre de petits carrés dans le découpage... On pourra alors exhiber le dessin suivant

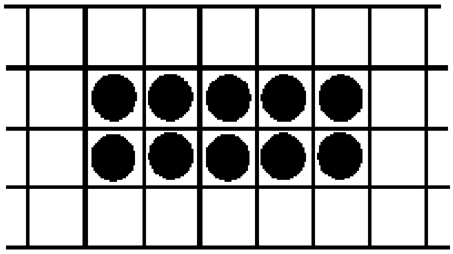


et éventuellement observer qu'il se généralise pour donner des découpages en 1+(2k+1) carrés, k naturel quelconque. On laissera ici au lecteur le plaisir de chercher la solution complète du problème!
Une fois le problème résolu, de nombreuses questions ouvertes peuvent être évoquées (le rapport des longueurs de petits carrés apparaissant dans un découpage valide sont-ils toujours rationnels? Y a-t-il une forme d'unicité du découpage en n morceaux, quand il est possible?)
De nombreuses variantes sont également possibles (découpages de triangles équilatéraux par des triangles équilatéraux, découpages de cubes par des cubes).

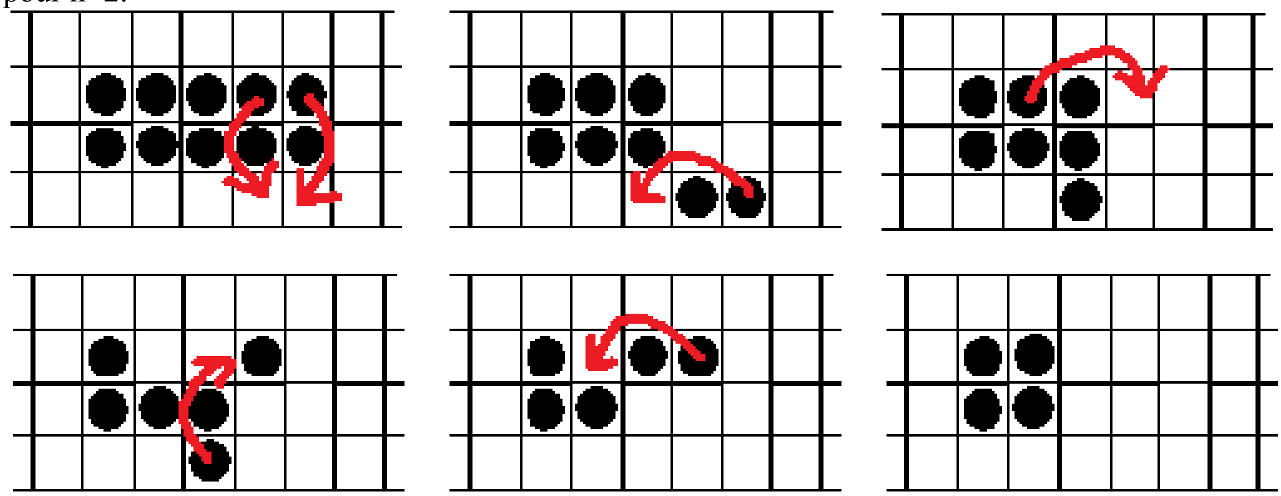
Solitaire rectangulaire

On propose ici de jouer au « solitaire » à partir d'une configuration de pions disposés en rectangle 2xn, pour un certain nombre naturel n (voir la figure ci-dessous pour n=5). La règle du solitaire est qu'un pion peut sauter au dessus d'un voisin (et le manger au passage) à condition que la case

d'arrivée soit vide. Les sauts ne sont autorisés que horizontalement et verticalement, pas en diagonale.
On se demande alors pour quelles valeurs de n le puzzle a une solution (c'est-à-dire qu'il existe une suite de mouvements légaux pour se ramener à une configuration avec un seul pion – un pion « solitaire »).



Ici encore, les petites valeurs de n sont propices à l'expérimentation, et l'on se convainc rapidement que pour n=1,2,4,5, le puzzle a une solution (il suffit d'exhiber une suite de mouvements légaux éliminant tous les pions sauf un). Pour n=3, on est vite amené à conjecturer qu'il n'y a pas de solution, mais ceci n'est pas commode à démontrer (on peut y arriver en faisant une exhaustion des cas, en s'organisant bien pour vérifier l'exhaustivité!) Pour n=6, on se convainc très vite que l'exhaustion des cas est prohibitive...
Les courageux qui auront testé les valeurs n=7,8.. seront peut-être enclins à conjecturer une condition suffisante (voire une condition nécessaire et suffisante) sur n pour que le puzzle soit résoluble. Sinon, on pourra attendre la discussion ci-dessous.
En revenant en arrière et en étudiant la/les solution(s) pour n=5, on pourra guider vers l'idée de l'utilisation d'une récurrence, en montrant comment le problème pour n=5 se ramène au problème pour n=2.



On peut alors voir le dessin ci-dessus comme une preuve « sans mots » du fait que si le puzzle est résoluble pour n, alors il l'est pour n+3. En particulier, comme il est résoluble pour n=1 et n=2, il est résoluble pour tout n dont le reste de la division par 3 est soit 1, soit 2.
La récurrence ci-dessus ne dit rien cependant sur les cas où n est divisible par 3 (une discussion de ce fait peut être utile!) Nous laisserons ici le plaisir au lecteur de réfléchir à la (non?) solubilité du puzzle pour n=3k.

3. Le stage de formation du PAF (mars 2011)

Une partie importante du travail de cette année a porté sur la préparation d'un nouveau stage du Plan Académique de Formation intitulé « Raisonnement, logique et preuve en seconde », mis en place à la demande du rectorat de Grenoble.

Partant des constats, résumés ci-dessus, sur les nouveaux programme, document ressource et manuels scolaires pour la classe de Seconde, nous avons tenté de répondre à travers diverses activités à la question de l'introduction de la logique mathématique en classe de seconde.

Le programme détaillé du stage donné ci-dessous résume les objectifs et notions mis en jeu dans chacune des activités proposées, et rend compte du travail effectué auprès des participants. Les documents distribués au cours du stage, ainsi que quelques documents pédagogiques complémentaires, sont proposés en annexe.

Outre deux SiRC (Situation de recherche pour la Classe), plusieurs activités proposées dans le stage ont au préalable fait l'objet d'expérimentations. Par exemples, les activités « Énigme d'Einstein », « Circuit électrique » et les petits problèmes de logiques proposés lors de la seconde journée (Annexes C,D et E) ont été utilisés dans l'option « Ouverture aux mathématiques » à l'Université Stendhal, dans une classe de vingt étudiants

Le stage s'est tenu sur deux jours en mars 2011, dans les locaux du département de mathématiques (Institut Fourier) de l'Université Joseph Fourier, et sur un total de 12 heures. Il a impliqué une vingtaine de participants, enseignant majoritairement en lycée.

Programme détaillé

mardi 22 mars (6 heures, Martin Deraux et Denise Grenier)

• Introduction et programme des deux jours (10 min).
• Quatre problèmes de logique – voir Annexe A (40 min).
Ces quatre problèmes concernent dan sleur ensemble les différents points de vue sur l'implication : déductif, logique formelle, inclusion d'ensemble, et les quantificateurs. Leur objectif est de situer les connaissances de chacun des participants sur le thème du stage. Deux phases pour cette activité.

  • résolution et analyse des connaissances en jeu, en individuel ou en groupe,
  • mise en commun des notions, puis synthèse,

• Brève présentation « théorique » sur le raisonnement en mathématique (20 min)
• les différents types de raisonnements déductifs, leurs liens et leurs différences
• le point de vue ensembliste, reliant l'inclusion à l'implication, la quantification
• la logique formelle et les liens entre ces trois aspects.

• Étude de quelques exercices des documents ressources de collège et seconde (1h30).
Références : « ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège, raisonnement et démonstration », ministère de l'éducation nationale, Eduscol, juin 2009, et « ressources pour la classe de seconde, Notations et raisonnement mathématiques », ministère de l'éducation nationale, Eduscol, juin 2009.
Objectif : débattre de la pertinence et de la faisabilité des exercices proposés, par rapport au travail sur le raisonnement et la logique.

• SiRC : Pavage de polyminos carrés ayant un trou d'une case, avec des dominos – voir Annexe B (2h).
Cette Situation de Recherche pour la Classe, développée depuis de nombreuses années dans l'équipe Maths-à-Modeler, et intégrée dand différents cursus universitaires, permet de travailler, avec des élèves de collège et lycée, sur les éléments suivants de l'activité mathématique:

la construction de conjectures,
les formulations si .. alors, seulement si, il faut, il suffit, condition nécessaire, condition suffisante, un (au moins), etc,
la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, et les contre-exemples,
différents types de preuve : par disjonction des cas, par l'exemple, par l'absurde, par récurrence, et la négation d'une implication,
l'utilisation d'outils pour les preuves : partition du polymino, coloration.

• Étude d'une preuve logique et non-constructive basée sur le principe du tiers exclu : « Il existe deux irrationnels a et b tels que a^b est un nombre rationnel » (10 min). La preuve en question est accessible dès la fin du collège.

• Temps de parole aux enseignants pour un premier bilan questions, critiques, etc (40 min).

Jeudi 31 mars (6 heures, Yvan Bicais, Martin Deraux et Jean-Baptiste Meilhan)

• L'énigme d'Einstein – voir Annexe C (45min).
Travail individuel de résolution.
Discussion des différentes méthodes employées (arbre de choix, logigramme, tableaux de synthèse).
Analyse d'une solution (intérêt d'une hiérarchisation des données d'un problème).
Versions simplifiées de l'énigme pour la classe.

• L'activité « Circuit électrique » – voir Annexe D (1h).
Introduction au débat scientifique
Examen des nombreuses notions logiques impliquées dans l'activité : Notions de conjecture, d'implication/réciproque/contraposée, notion de contre-exemple et de négation d'une implication, connecteurs logiques, implication dont la prémisse est fausse...
recherches de nouveaux circuits portant sur d'autres notions logiques.

• Feuille de petits problèmes de logique – voir annexe E (1h30).
Travail individuel puis résolution et, le cas échéant, discussion sur les diverses méthodes pouvant être employées,
Analyse des notions mises en jeu dans chaque problème.

• Étude d'une preuve fausse : « Tout triangle est isocèle ! » (15min).
Discussion sur le raisonnement.

• SiRC : « la chasse à la bête » (2h).
Autre situation de recherche pour la classe, poursuivant les objectifs détaillés dans le situation de pavage par polyminos, voir plus haut et Annexe B.

• Bilan (30min).
Cette discussion finale est revenue sur les notions mathématiques mises en jeu à travers chacune des activités de ce stage, ainsi que la pertinence et la faisabilité de telles activités en classe.

Le contenu du stage est en accord avec le double objectif du programme de seconde, le raisonnement logique, et la mise en situation de recherche des élèves.

Chaque activité proposée semble de fait avoir trouvé son public parmi les participants au stage, qui ont manifesté pour la plupart l'envie de ré-utiliser quelques-uns des problèmes dans leurs classes. Ceci a naturellement conduit à un débat assez long sur la question de la faisabilité, liée au volume horaire nécessaire à ces diverses activités (notamment les deux SiRC étudiées) et à la nécessité de boucler le programme. Les participants au stage ont largement manifesté leur inquiétude devant la réduction du nombre d'heures de mathématiques dans l'enseignement.

ANNEXE A

L'implication en mathématique

Question. Résoudre et étudier les problèmes suivants : connaissances sont en jeu, difficultés possibles, etc.

Problème 1. Soit la phrase : « x^2 se termine par 996 si le nombre x se termine par 114 »
que l'on notera « A si B » (il s'agit donc de B=> A)
Les phrases suivantes sont-elles équivalentes à la phrase donnée ? Justifier.

	Oui	Non	Non so
Pour que A il faut que B			
Pour que B, il faut que A			
Pour que A, il suffit que B			
Pour que B il suffit que A			
Non A ou B			
A et (non B)			
(non B) ou A			
A => B			
non A => non B			
B seulement si A			
(non B) si A			

Problème 2. Voici trois propriétés relatives à des **losanges**. Indiquer, dans chacune des cases correspondantes si l'énoncé proposé est vrai (V) ou faux (F). **Justifiez.**

A: Posséder 2 angles droits et des diagonales de même longueur.
B: Posséder un angle droit.
C: Etre un carré.

A est une condition nécessaire pour B	
A est une condition suffisante pour B	
B est une condition nécessaire pour A	
B est une condition suffisante pour A	
A est une condition nécessaire pour C	
A est une condition suffisante pour C	
C est une condition nécessaire pour A	
C est une condition suffisante pour A	
C est une condition nécessaire pour B	
C est une condition suffisante pour B	
B est une condition nécessaire pour C	
B est une condition suffisante pour C	

Problème 3.

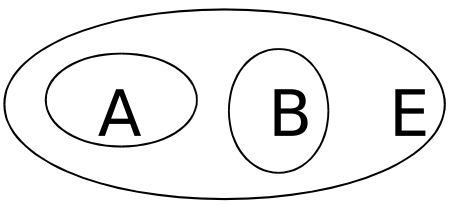
Que pensez-vous des implications suivantes ? **Justifiez** chacune de vos réponses.

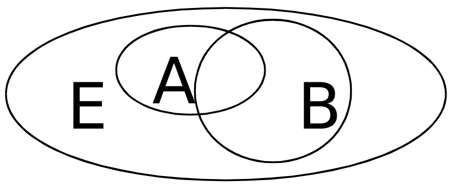
Soit k ε N quelconque,	Vrai	Faux	On ne peut pas savoir	Je ne sais pas répondre
a) k pair => k+1 pair				
b) k pair => k+1 impair				
c) k impair => k+1 pair				
d) k impair => k+1 impair				

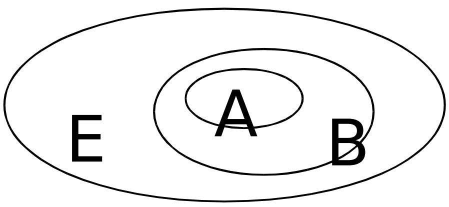
a') 3 pair => 4 pair				
b') 3 pair => 4 impair				
c') 3 impair => 4 pair				
d') 3 impair => 4 impair				

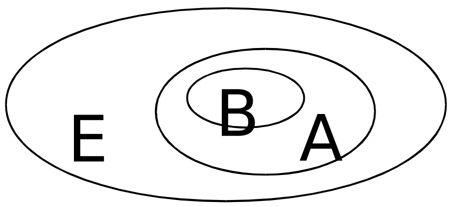
Problème 4.

Etant donnés un ensemble E et deux propriété $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur E, soit A l'ensemble de tous les éléments de E qui vérifie $\mathcal{A}$ et B l'ensemble de tous les éléments de E qui vérifient $\mathcal{B}$.
Hachurez dans chacun des cas ci-dessous le sous-ensemble de E tel que $\mathcal{A}$=>$\mathcal{B}$. Justifier.









ANNEXE B

Deux exemples de situations de recherche pour la classe

Denise GRENIER,
Équipe *Combinatoire et Didactique* Institut Fourier et ERTé « Maths-à-modeler »

Introduction

L'activité d'un chercheur, c'est, pour une grande part, choisir une question, expérimenter, étudier de cas particuliers, choisir un cadre de résolution, modéliser, énoncer des conjectures, prouver, définir, changer éventuellement la question initiale ... Les *savoir-faire* associés sont constitutifs de la démarche scientifique et sont nécessaires pour faire des mathématiques. Ils ne peuvent être réduits à des techniques ou à des méthodes et nécessitent un vrai apprentissage sur le long terme.

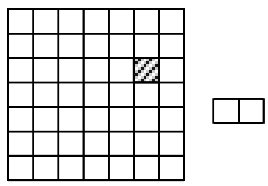
Les programmes scolaires en mathématiques du primaire et du secondaire à tous les niveaux insistent sur l'importance de l'expérimentation, la découverte et la qualité de l'activité scientifique en classe, liées à la possibilité d'étudier des conjectures, de raisonner et de prouver. Cependant, pour que les élèves puissent s'investir dans ce type de problème, il est essentiel que les notions mathématiques sous-sous-jacentes ne soient pas complexes pour eux.

L'équipe « combinatoire et didactique des mathématiques » de l'Institut Fourier et l'ERTé Maths-à-Modeler construisent et étudient depuis plusieurs années des Situations de Recherche pour la Classe (SiRC), pour tous niveaux de connaissances. En voici deux exemples, la première est pertinente du primaire au doctorat, le seconde à partir du collège.

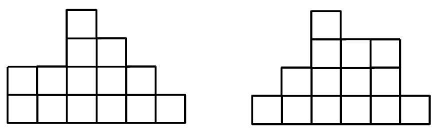
1. Pavage de polyminos

Les trois problèmes ci-dessous constituent à notre avis une situation fondamentale pour le raisonnement et la preuve. Elle est utilisée dans différents cursus d'enseignement depuis une quinzaine d'années. On en trouve des analyses détaillées dans Grenier et Payan (1998 et 2003) et Grenier (2006 et 2008). Chacun des trois problèmes contient un ou des paramètres laissés à la charge de l'élève (variables de recherche).

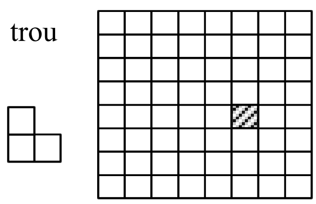
Problème P1. Etant donné un polymino (grille carrée) de taille quelconque avec un « trou » d'une case, pour quelles positions du trou est-il pavable par des dominos ? Le trou peut se situer n'importe où, y compris sur un bord ou un coin du polymino.
Voici le dessin pour le polymino de taille 7 et un cas particulier de la position du trou (case hachurée).



Problème P2. A quelles conditions un trapèze de taille quelconque est-il pavable par des dominos ? Voici deux exemples de trapèzes.



Problème P3. Etant donné un carré de taille 2^n, n quelconque avec un « trou » d'une case, pour quelles positions du trou est-il pavable par des triminos coudés ?
Ci-contre, un cas particulier avec n=8 et une position particulière du trou (hachuré).



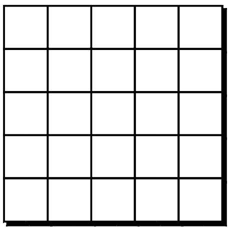
2. La chasse à la bête (optimisation dans les entiers)

Cette situation, inventée (dans un objectif de vulgarisation) à l'occasion d'une thèse en mathématiques discrètes[1] et régulièrement proposée par l'équipe maths-à-modeler, a été étudiée dans le cadre d'un mémoire de master2 de didactique (Chassan, 2009), dans des classes de primaire (CE2, CM1 et CM2) et dans un groupe de PE2. Elle est intégrée dans des cursus optionnels à l'Université.

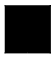
Le problème général est le suivant.

> On se donne un grille rectangulaire (un polymino) qui représente un champ, un ensemble de polyminos plus petits (dominos, ou triminos longs, ou triminos coudés) qui seront des types de bêtes et un ensemble d'uniminos qui seront des pièges. Les ensembles de bêtes et de pièges sont aussi grands que l'on veut. Sachant que les bêtes se posent le long des cases de la grille (et non en travers), ***pour chaque type de bêtes***, quel est le plus petit nombre de pièges qui assure la protection du champ ? On ne mélange pas les types de bêtes.

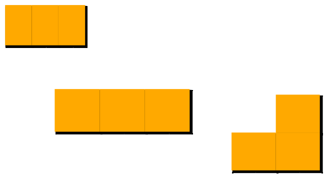
Le matériel fourni est le même que pour la situation des pavages (ce qui est très pratique en classe !) et les dimensions du champ (un carré 5x5) sont choisies pour leur pertinence (résolutions accessibles et cependant très formatrices). Les pièges sont des uniminos (recouvrent une case), les bêtes sont des dominos et les deux types de triminos.



Le champ



un piège



les trois types de bête

La « chasse à la bête » est une situation accessible dès le primaire et elle reste pertinente jusqu'à la fin de l'université.
L'optimum (minimum) cherché est un entier que l'on obtient par des encadrements successifs de plus en plus serrés. Comme on travaille dans les entiers, le nombre d'étapes est fini.
Dans chacun des trois cas, pour chercher l'optimum, il faut proposer un ensemble de pièges (nombre et positions sur le polymino), vérifier que cet ensemble est solution (c'est-à-dire protège bien le champ), puis étudier s'il réalise le minimum.
L'expérimentation avec du matériel manipulable est nécessaire car celui-ci permet de changer facilement les positions et le nombre de pièges (indispensable pour résoudre le problème) sans que ce soit fastidieux.
Pour une progression raisonnée des apprentissages, l'ordre des types de bête doit être : d'abord, les dominos (cela permet de bien comprendre le problème posé), puis les triminos longs et enfin les triminos coudés. Pour ces derniers, la preuve de l'optimum est un peu plus difficile à mener.

3. Les apprentissages en jeu dans les deux situations

Existence ou non de solutions. En classe, tout problème a une solution, souvent unique. Ici, dans la situation de pavage des polyminos, dans P1, l'existence de solutions dépend de la position de la case manquante (qui est une des variables de recherche), tandis que dans P2, des solutions existent dès que le polymino vérifie une condition (trapèze équilibré). P3, lui, admet des solutions dans tous les cas (quelle que soit la position de la case manquante).
L'existence d'une solution minimum dans la situation de la chasse à la bête se pose différemment : puisqu'on est dans les entiers, il en existe nécessairement un, mais lequel ?

[1](Eric Duchêne, thèse de l'UJF, 2006)

Distinction entre « condition nécessaire » et « condition suffisante ». Dans ces problèmes, les CN ne sont pas toujours suffisantes et vice-versa. De plus, si une condition est une CNS, alors la preuve de sa nécessité peut être très différente de celle de sa suffisance (exemple typique dans le problème 1). On a vu aussi les liens entre les inégalités ≤/≥, borne sup/borne inf et CS/CN dans la chasse à la bête.

Différents types de preuve et outils de preuve non usuels. Le pavage des polyminos permet d'aborder des types de preuve variés : par l'absurde, par contraposée, par récurrence, mais aussi des preuves moins usuelles en classe : « par exhaustivité des cas », ou par « exhibition d'un exemple » (en réponse à une question d'existence). Enfin, on y rencontre des preuves d'un type nouveau, telles la structuration ou partition d'une figure, ou la coloration (liée à la coloration des graphes de grille).

Les notions mathématiques. Elles concernent essentiellement les propriétés de N, l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls, avec des niveaux d'approche différents selon les problèmes : calcul d'aires, divisibilité de deux nombres, preuve par récurrence, encadrement d'un entier par des entiers.

Quelques références

Chassan G. (2009), *Apport des situations de recherche à l'apprentissage des « savoirs transversaux »*, mémoire de master2 didactique des sciences, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Grenier, D. (2008), *Expérimentation et preuves en mathématiques*, in Didactique, épistémologie et histoire des Sciences, PUF, collection « Sciences, homme et société » (L. Viennot ed).

Grenier, D. (2006), Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. *Actes du colloque de l'Association Mathématique du Québec (AMQ)*, Sherbrooke, juin 2006.

Grenier, D. & Payan, Ch. (2003), Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *cahiers du séminaire national de l'ARDM, Paris, 19 Octobre 2002.*

Grenier, D. & Payan, Ch. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactiques des mathématiques,* Vol. 18, n°1, pp. 59-99.

ANNEXE C

L'énigme d'Einstein

L'énigme originale

Dans une ruelle, il y a cinq maisons voisines de 5 couleurs différentes, et dans chaque maison vit une personne de nationalité différente. Chacun des 5 propriétaires boit un certain type de boisson, fume un certain type de cigares et garde un certain animal domestique.

On dispose des indices suivants :

1. L'Anglais vit dans une maison rouge.
2. Le Suédois a des chiens comme animaux domestiques.
3. Le Danois boit du thé.
4. La maison verte est à gauche de la maison blanche.
5. Le propriétaire de la maison verte boit du café.
6. La personne qui fume des Pall Mall a des oiseaux.
7. Le propriétaire de la maison jaune fume des Dunhill.
8. La personne qui vit dans la maison du centre boit du lait.
9. Le Norvégien habite la première maison.
10. L'homme qui fume les Blend vit à côté de celui qui a des chats.
11. L'homme qui a un cheval est le voisin de celui qui fume des Dunhill.
12. Le propriétaire qui fume des Blue Master boit de la bière.
13. L'Allemand fume des Prince.
14. Le Norvégien vit juste à côté de la maison bleue.
15. L'homme qui fume des Blend a un voisin qui boit de l'eau.

La question est :

A qui appartient le poisson ?

1. Université Joseph Fourier – IREM de Grenoble

Cette énigme a été posée par A. Einstein au début du vingtième siècle. Il annonçait alors que, selon lui, 98% des gens seraient incapables de la résoudre.
Ce chiffre est-il encore vrai aujourd'hui ? L'a-t-il jamais été ? Il reste que cette énigme demeure assez complexe.

Versions simplifiées

On peut construire une infinité de situation similaires, mais de complexité moindre, en réduisant le nombre de paramètres à prendre en considération.
Voici deux exemplex de versionx simplifiéex de l'énigme d'Einstein qui semblent mieux adaptées pour la classe.

Exercice 1.
Dans une rue, il y a quatre maisons voisines de 4 couleurs différentes. Dans chaque maison vit une personne de nationalité différente, et chacun des 4 propriétaires a un métier différent. On dispose des indices suivants :

1. L'Espagnol n'est pas informaticien, et n'est pas le voisin de l'informaticien.
2. Le Français n'habite pas la maison rouge.
3. Le Belge n'habite pas la maison jaune.
4. La maison rouge et la maison verte sont voisines.
5. L'informaticien n'a qu'un voisin.
6. L'astronome n'habite pas la maison bleue.
7. Le belge a deux voisins : l'Espagnol et l'Anglais.
8. L'Anglais est musicien.

Qui habite où ?

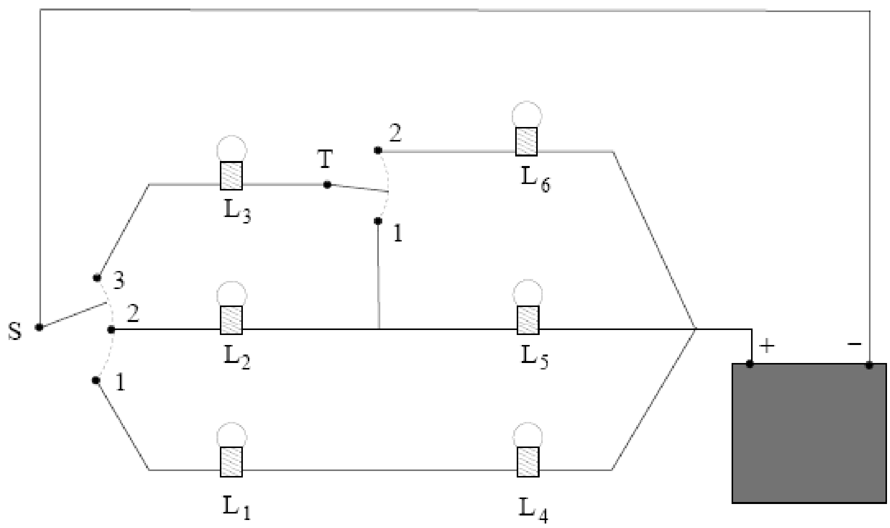
Exercice 2.

Trois commerçants habitent dans 3 maisons situées aux numéros 21, 23 et 25 de la même rue. Le boucher habite dans la maison jaune, qui est à côté de la rouge mais qui n'est pas à côté de la verte. L'épicier, qui n'est pas suisse, habite à côté du Français. L'Italien habite au numéro 21 et sa maison n'est pas jaune. Quelle est la nationalité du pharmacien, quelle est la couleur de sa maison, et où habite-t-il ?

ANNEXE D

Le Circuit Electrique

Le circuit électrique ci-dessous comporte six lampes notées $L_1, L_2, \cdots, L_6$ et deux commutateurs S et T. Le commutateur S peut prendre trois positions S_1, S_2 et S_3 et le commutateur T deux positions T_1 et T_2.



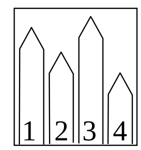
d'après M. Legrand, *"Circuit" ou les règles du débat mathématique,* in Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, Commission inter-IREM Université (Eds.) (1990), 129–161.

ANNEXE E

Stage *Raisonnement, Logique et Preuve* du PAF de l'académie de Grenoble [1] – 2010-2011

Quelques Exercices autour de la Logique Mathématique

Exercice 1



Quatre crayons sont rangés dans une boîte, représentée ci-contre. On sait que le crayon vert ne cotoie ni le rouge, ni le bleu, et que le crayon jaune est plus court que le crayon bleu. Donner dans l'ordre (de gauche à droite) la couleur de chaque crayon.

Exercice 2

Une boîte contient 100 pions, chaque pion étant soit noir, soit blanc. Que peut-on dire sur le nombre de pions blancs et noirs, sachant qu'il y a au moins un pion blanc, et que si l'on pioche deux pions au hasard, on a toujours au moins un pion noir.

Exercice 3

Théo dit à sa mère : "Dimanche, s'il fait beau, je vais me promener."
Le dimanche il pleut mais Théo va quand même se promener (et ne fait pas son devoir pour lundi).
A-t-il menti ?

Exercice 4

Une boite contient des pièces carrées et des pièces triangulaires. Ces pièces sont soit rouges soit vertes. On sait que toutes les pièces carrées sont rouges. Parmi les affirmations suivantes, indiquer celles qui sont vraies.

1. Il n'y a que les pièces carrées qui sont rouges.
2. Il n'y a aucune pièce carrée et verte.
3. Toutes les pièces triangulaires sont vertes.
4. Toutes les pièces rouges sont carrées.
5. Toutes les pièces vertes sont triangulaires.

1. Université Joseph Fourier – IREM de Grenoble

Exercice 5

Les phrases écrites dans la liste suivante peuvent être vraies ou fausses :
– Dans cette liste, il n'y a aucune phrase vraie.
– Dans cette liste, il n'y a qu'une seule phrase fausse.
– Dans cette liste, il y a exactement deux phrases vraies.
– Dans cette liste, il y a exactement deux phrases fausses.
Combien y a-t-il de phrases vraies dans cette liste ?

Exercice 6

Arthur a pensé à trois nombres entiers a, b et c, il ne dit pas lesquels. Mais il donne pour indications quatre phrases, en affirmant qu'une seule d'entre elles est fausse. Pouvez-vous trouver laquelle, et combien de nombres impairs a choisi Arthur.

1. a est impair ou b est pair.
2. c et b sont de même parité.
3. c et a sont pairs.
4. b est pair.

Exercice 7 *La tâche de Wason*

On présente quatre cartes sur lesquelles sont écrits respectivement A, B, 4 et 7. On sait que sur chaque carte, il y a une lettre sur une des faces et un nombre sur l'autre face. On ne peut voir l'autre face. Quelle(s) carte(s) doit-on retourner pour déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Si une carte a une voyelle écrite sur une face, alors il y a un nombre pair écrit sur l'autre face » ?

Exercice 8

Trois plateaux sont disposés selon leur poids en ordre décroissant (P_1 le plus lourd, P_3 le plus léger) :

$$P_1 : \bullet \bullet \star \quad ; \quad P_2 : \star \diamond \diamond \quad ; \quad P_3 : \diamond \bullet \diamond$$

On considère les plateaux suivants :

$$P_4 : \diamond \diamond \diamond \quad ; \quad P_5 : \star \star \star \quad ; \quad P_6 : \diamond \bullet \star$$

Ordonnez ces six plateaux selon leur poids (en ordre décroissant).

Exercice 9 *Le facteur perspicace*

Connaissant l'intérêt de son facteur pour les énigmes, un homme lui déclare un jour : « J'ai trois filles, le produit de leurs âges vaut 36 et la somme de leurs âges est égale au numéro de la maison qui se trouve de l'autre côté de la rue ». Le facteur intrigué réfléchit quelques instants puis dit : « J'y suis presque, mais il me manque un indice ». L'homme rajoute : « Mais oui, j'ai oublié de vous dire que l'aînée joue du piano ! » Le facteur trouve alors la réponse.
Et vous ?

Exercice 10 *La pièce disparue*

Trois personnes ont payé chacune 10 euros pour un repas dans un restaurant. Le caissier se rend compte très vite que le total de la facture ne devait être que de 25 euros. Il appelle le serveur, et lui donne 5 euros à remettre tout de suite aux trois clients. Le garçon, anticipant sur son pourboire, rend 1 euro à chacun d'eux et garde les 2 euros restants pour lui. Les trois clients ont donc payé en tout 3 fois 9 euros= 27 euros. En ajoutant les 2 euros gardés par le garçon, cela fait $27 + 2 = 29$ euros.
Où est passé le dernier euro ?

Exercice 11 *Cent déclarations*

Sur une (grande) feuille de papier, cent déclarations sont écrites.
La première dit : « sur cette feuille, il n'y a qu'une seule fausse déclaration. »
La seconde dit : « sur cette feuille, il y a deux et seulement deux fausses déclarations. »
La troisième dit : « sur cette feuille, il y a trois et seulement trois fausses déclarations. » et ainsi de suite jusqu'à la centième, qui dit : « sur cette feuille, il y a cent et seulement cent fausses déclarations. »
Combien de déclarations de cette feuille sont-elles vraies ?

Exercice 12

Voici quatre affirmations relatives aux mêmes quatre nombres entiers a, b, c et d. Parmi elles, une seule est fausse. Laquelle ?

1. b et c sont des entiers pairs.
2. c et d sont de même parité.
3. d et b sont deux nombres impairs.
4. c est pair.
5. a est pair ou c est pair.

Exercice 13

John, Paul, Georges et Ringo prononcent les phrases suivantes :
– John : *J'aime la quiche Lorraine.*
– Paul : $1 + 3 \times (2 + 5 \times 2) \times 3 + 1 = 110$.
– Georges : *La phrase de John est fausse.*
– Ringo : *Aucune des phrases précédentes n'est vraie.*
Peut-on déterminer le nombre de phrases vraies ?

Exercice 14 *L'île des Purs et des Pires (d'après R. Smullyan).*

Sur cette île, il y a deux types d'habitants : les Purs, qui disent toujours la vérité, et les Pires, qui mentent toujours. Chaque habitant de l'île est soit un Pur, soit un Pire.

1. Vous rencontrez deux habitants de l'île, A et B. A affirme : *Au moins l'un de nous deux est un Pire*. Que sont A et B ?
   Supposons que A dise plutot : *Je suis un Pire ou B est un Pur*. Que sont alors A et B ?

2. Vous êtes maintenant avec trois habitants, A, B et C. A dit : *Nous sommes tous des Pires*, ce à quoi B répond : *Un et un seul d'entre nous est Pur*. Que sont A, B et C ?
3. Qu'aurait-on pu dire si B avait répondu : *Un et un seul d'entre nous est Pire* ?